REPUBLIQUE TUNISIENNE EXAMEN DE BACCALAUREAT SESSION 2020	**Session principale**	
	Epreuve : Mathématiques	Section : Sciences expérimentales
	Durée : **3 h**	Coefficient de l'épreuve : **3**

Exercice n° 1 — 3points

Le tableau ci-dessous donne la répartition d'une population en trois catégories, selon l'indice de masse corporelle (IMC) exprimé en kg/m^2.

Catégorie	(IMC < 25) Personnes de poids normal	(25 ≤ IMC < 30) Personnes en surpoids	(IMC ≥ 30) Personnes obèses
Pourcentage	50%	30%	20%

Une étude a montré que :

- 3% des personnes de poids normal sont diabétiques.
- 7% des personnes en surpoids sont diabétiques.
- 9 % des personnes obèses sont diabétiques.

On choisit au hasard une personne de cette population et on considère les événements suivants :

A : « La personne choisie est de poids normal ».

B : « La personne choisie est en surpoids ».

C : « La personne choisie est obèse ».

D : « La personne choisie est diabétique ».

1) a) Déterminer $p(A \cap D)$, $p(B \cap D)$ et $p(C \cap D)$.

1) a) $p(A\cap D)=p(D/A)\times p(A)=0{,}03\times 0{,}5=0{,}015$

$p(B\cap D)=p(D/B)\times p(B)=0{,}07\times 0{,}3=0{,}021$

$p(C\cap D)=p(D/C)\times p(C)=0{,}09\times 0{,}2=0{,}018$

b) Montrer que $p(D)=0.054$.

b) $p(D)=p(A\cap D)+p(B\cap D)+p(C\cap D)=0{,}015+0{,}021+0{,}018=0{,}054$

c) Calculer la probabilité que la personne choisie ne soit pas de poids normal sachant qu'elle est diabétique. (On donnera le résultat arrondi à 10^{-3})

c) $p(\overline{A}/D)=1-p(A/D)=1-\dfrac{p(A\cap D)}{p(D)}=1-\dfrac{0{,}015}{0{,}054}=0{,}722$

Autre méthode : $p(\overline{A}/D)=\dfrac{p(\overline{A}\cap D)}{p(D)}=\dfrac{p(B\cap D)+p(C\cap D)}{p(D)}=\dfrac{0{,}021+0{,}018}{0{,}054}=0{,}722$

2) On choisit, au hasard, n personnes de cette même population. On désigne par p_n la probabilité qu'aucune personne n'est diabétique.

a) Exprimer p_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

2) a $p_n = \left(p\left(\overline{D}\right)\right)^n = (1-0,054)^n = 0,946^n$. $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0,946^n = 0$

b) Déterminer le plus petit entier n pour lequel $p_n \le 0.1$.

$p_n \le 0,1 \Leftrightarrow 0,946^n \le 0,1 \Leftrightarrow n\ln(0,946) \le \ln(0,1)$. D'où $n \ge \dfrac{\ln(0,1)}{\ln(0,946)} \Leftrightarrow n \ge 41,4785207...$ donc $n = 42$

Exercice n° 2 **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Dans la **figure de l'annexe ci-jointe** (page 4/4), on a placé les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_B = \frac{1}{2}z_A^2$, ainsi que le milieu I du segment [AB].

1) a) Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes z_A et z_B.

1) a) $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$

$z_B = \frac{1}{2}z_A{}^2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + i\sqrt{3}$

b) Vérifier que l'affixe du point I est $z_I = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)$.

b) $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{\sqrt{3} + i + 1 + i\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + 2z - 2\left(1+\sqrt{3}\right)(1+i) = 0$.

Soit M et N deux points d'affixes respectives z et $\frac{1}{2}z^2$ où z est un nombre complexe non nul et différent de 2.

a) Montrer que le point I est le milieu de [MN], si et seulement si, z est une solution de (E).

2) a) I est le milieu de [MN] $\Leftrightarrow$si $z_I = \dfrac{z_M + z_N}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i) = \frac{z + \frac{1}{2}z^2}{2} \Leftrightarrow \left(1+\sqrt{3}\right)(1+i) = z + \frac{1}{2}z^2$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 2z - 2\left(1+\sqrt{3}\right)(1+i) = 0 \Leftrightarrow z \text{ est une solution de (E)}$$

b) Justifier que z_A est une solution de (E).

b) I est le milieu de [AB] avec A d'affixe z_A et B d'affixe $\frac{1}{2}{z_A}^2$ avec $z_A \neq 2$ donc z_A est une solution de l'équation (E).

3) Soit z_C la deuxième solution de (E). C le point d'affixe z_C et K le point d'affixe (−2).

a) Donner la valeur de $z_A + z_C$.

3) a) z_A et z_C sont les solutions de (E) don $z_A + z_C = -2$

b) Montrer que le quadrilatère OAKC est un parallélogramme. Construire alors le point C.

b) $z_A + z_C = z_O + z_K = -2$ ainsi $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_O + z_K}{2}$ et par suite [AC] et [OK] ont même milieu et O, A et K non alignés donc OAKC est un parallélogramme.

c) Soit le point D d'affixe $z_D = \frac{1}{2}z_C^2$. Construire dans l'annexe le point D.

C et D sont les points d'affixes z_C et $\frac{1}{2}z_C^2$. z_C est une solution de l'équation (E) donc I est le milieu de [CD].

4) a) Ecrire $(1+i)$ sous forme exponentielle. En déduire que $z_A \cdot z_C = 2(\sqrt{2}+\sqrt{6})e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}$

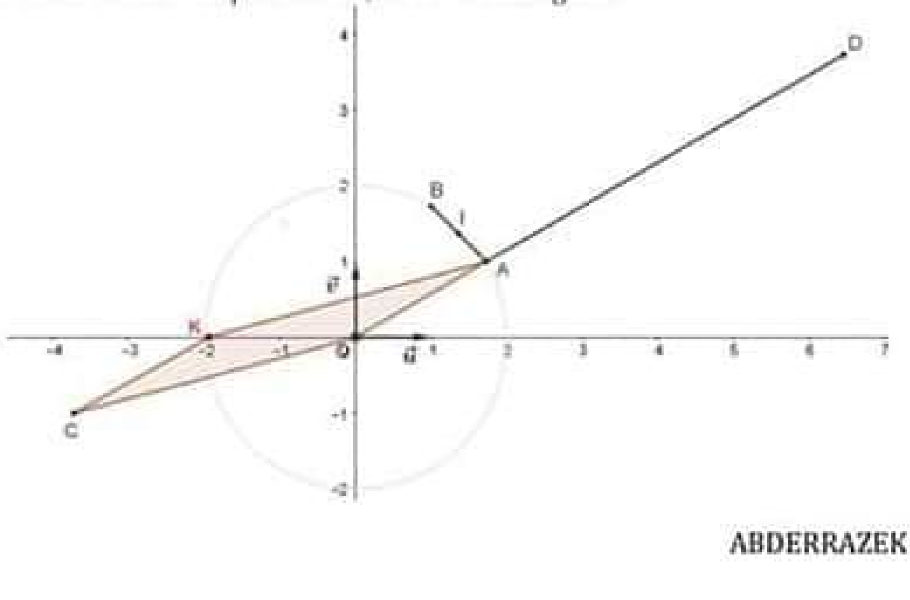
4) a) $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$z_A.z_C = -2\left(1+\sqrt{3}\right)(1+i) = -2\left(1+\sqrt{3}\right)\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)e^{i\frac{5\pi}{4}}$

b) Montrer que les points O, A et D sont alignés.

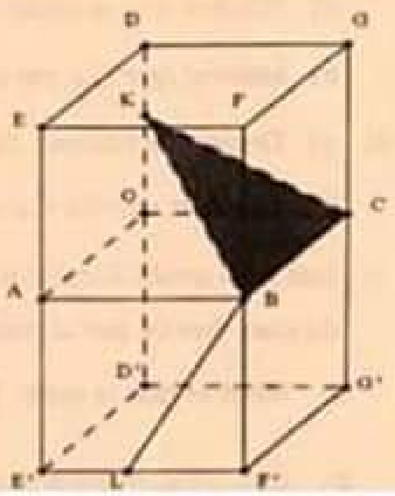
$$\frac{\text{aff}\left(\overrightarrow{OD}\right)}{\text{aff}\left(\overrightarrow{OA}\right)} = \frac{\frac{1}{2}z_C^2}{z_A} = \frac{1}{2}\frac{(z_A z_C)^2}{z_A^3} = \frac{1}{2}\frac{4\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2 e^{i\frac{5\pi}{2}}}{8e^{i\frac{\pi}{2}}} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}{4}e^{i2\pi} = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}{4} \in \text{IR}$$

Donc $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires et par suite O, A et D sont alignés.



Exercice n° 3	5 points

Dans la figure ci-contre, OABCDEFG et OABCD'E'F'G' sont deux cubes identiques d'arête 1. On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}\right)$. Les points K et L sont définis par $\overrightarrow{OK}=a\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{E'L}=(1-a)\overrightarrow{OC}$ où a est un réel de l'intervalle $]0,1[$.



1) a) Donner les coordonnées des points C, B, F et K.

b) Montrer que $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BK}=a\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$

c) Calculer le volume du tétraèdre FBCK.

1) a) $C(0,1,0)$; $B(1,1,0)$; $F(1,1,1)$ et $K(0,0,a)$

b) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}-1\\-1\\a\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}0\\a\\1\end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BK}=0\,\overrightarrow{OA}+a\overrightarrow{OC}+1\overrightarrow{OD}=a\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$

c) $\overrightarrow{BF}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}0\\a\\1\end{pmatrix}$ donc $V_{FBCK}=\dfrac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BK}\right).\overrightarrow{BF}\right|=\dfrac{1}{6}|1|=\dfrac{1}{6}$

2) Soit P le plan (BCK).

Montrer qu'une équation de P est $ay+z-a=0$.

$\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}0\\a\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P donc une équation de P est $ay+z+d=0$ avec d un réel.

Et comme $C(0,1,0)\in P$ donc $a+d=0\Leftrightarrow d=-a$

D'où une équation de P est $ay+z-a=0$.

3) a) Donner les coordonnées de E'. En déduire que $L(1,1-a,-1)$.

b) Montrer que B est le projeté orthogonal du point L sur le plan P.

3)a) $E'(1,0,-1)$ et $\overrightarrow{E'L}=(1-a)\overrightarrow{OC}$ donc $\begin{cases}x_L-1=0\\y_L=1-a\\z_L+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_L=1\\y_L=1-a\\z_L=-1\end{cases}$ d'où $L(1,1-a,-1)$

b) $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}0\\-a\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\a\\1\end{pmatrix}$ un normal à P donc $\overrightarrow{BL}=-\vec{n}$ d'où $(BL)\perp P$.

Et $B\in P$ d'où B est le projeté orthogonal de L sur P.

4) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que

$x^2+y^2+z^2-2x+2(a-1)y+2z+1-2a=0$.

a) Montrer que (S) est la sphère de centre L est de rayon $R=\sqrt{2+a^2}$

b) Montrer que (S) et P se coupent suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4) a) $M(x,y,z)\in(S)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+2(a-1)y+2z+1-2a=0$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2-1+(y+(a-1))^2-(a-1)^2+(z+1)^2-1+1-2a=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+(a-1))^2+(z+1)^2-a^2+2a-2-2a=0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+(a-1))^2+(z+1)^2=2+a^2$$

D'où (S) est la sphère de le point $L(1,1-a,-1)$ et de rayon $R=\sqrt{2+a^2}$

b) $d(L,P)=\dfrac{|a\times(1-a)-1-a|}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{|-a^2-1|}{\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{a^2+1}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}$ et $a\in]0,1[$

$a^2+1<a^2+2$ donc $\sqrt{a^2+1}<\sqrt{a^2+2}$ d'où $d(L,P)<R$

donc (S) et P se coupent suivant un cercle de centre B le projeté orthogonal de L sur P et de rayon

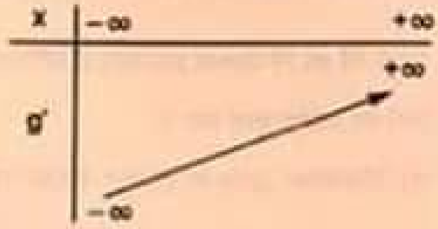
$r=\sqrt{\sqrt{a^2+2}^2-\sqrt{a^2+1}^2}=1.$

Exercice n° 4 **7 points**

1) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^2+e^{-x}$.

a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

On a dressé ci-contre, le tableau de variation de g' la fonction dérivée de g.



b) Montrer que l'équation $g'(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique β et vérifier que $0.3<\beta<0.4$.

c) Déterminer le signe de $g'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

1) a) la fonction g est dérivable sur IR.

Pour tout $x\in IR$, $g'(x)=2x-e^{-x}$

b) La fonction g' est continue et strictement croissante sur IR.

$g'(IR)=IR$ et $0\in IR$

Donc l'équation $g'(x)=0$ admet dans IR une solution unique β.

$g'(0,3)=-0,14$, $g'(0,4)=0,13$ et $g'(0,3)\times g'(0,4)<0$ donc $0,3<\beta<0,4$

c) D'après le tableau de variation de g' : $\begin{cases}g'(x)<0 & \text{si } x\in]-\infty,\beta[\\ g'(x)>0 & \text{si } x\in]\beta,+\infty[\end{cases}$

Dans la suite, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{g(x)}$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) Justifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)$ et $f'(x)$ ont même signe.

2) $f(x)=\sqrt{g(x)}=\sqrt{x^2+e^{-x}}$

La fonction g est dérivable et positive sur IR donc f est dérivable sur IR.

Pour tout $x\in IR$, $f'(x)=\dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$ donc $f'(x)$ et $g'(x)$ ont même signe.

3) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

3) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+e^{-x}}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+e^{-x}}=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+e^{-x}}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{\dfrac{x^2+e^{-x}}{x^2}}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2e^x}}=-\infty$

La courbe Cf admet au voisinage de $-\infty$ une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$

c) Vérifier que pour tout réel $x>0$, $f(x)-x=\dfrac{e^{-x}}{f(x)+x}$.

c) Pour tout réel $x>0$, $f(x)-x=\sqrt{g(x)}-x=\dfrac{\sqrt{g(x)}^2-x^2}{\sqrt{g(x)}+x}=\dfrac{g(x)-x^2}{\sqrt{g(x)}+x}=\dfrac{e^{-x}}{f(x)+x}$

d) Montrer que la droite $\Delta: y=x$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{f(x)+x}=0$ donc la droite $\Delta: y=x$ est une asymptote à la courbe Cf au voisinage de $+\infty$.

e) Montrer que C_f est au-dessus de la droite Δ.

e) $f(x)-x=\dfrac{e^{-x}}{f(x)+x}$ pour tout $x>0$, $f(x)+x=\sqrt{g(x)}+x>0$ et $e^{-x}>0$ donc

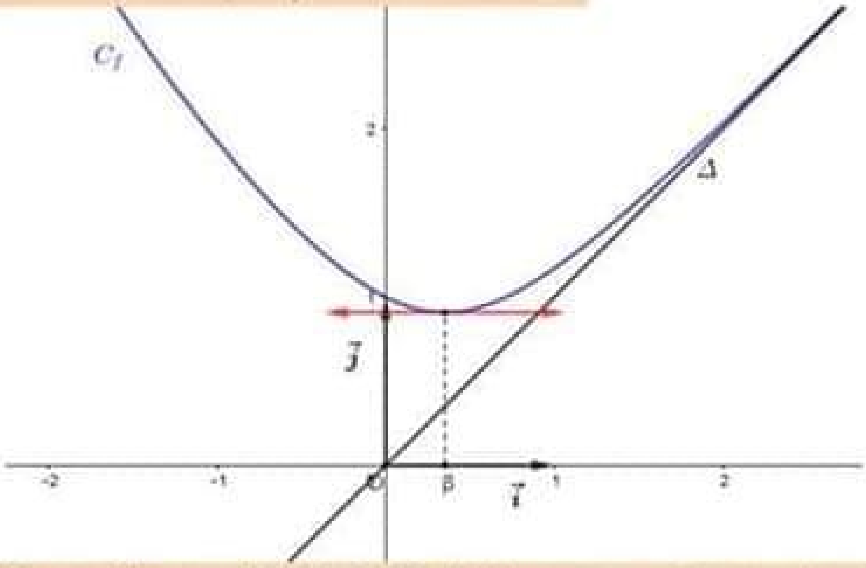
Pour tout $x>0, f(x)-x>0$ d'autre part pour tout $x\in IR, f(x)\geq 0$ donc Pour tout $x<0, f(x)-x<0$ et par suite Cf est au dessus de Δ.

4) a) Dresser le tableau de variation de f.

4)a)

x	$-\infty$		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

b) Tracer la courbe C_f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra $\beta \approx 0.35$)



5) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par a_n l'aire en (u.a) de la partie du plan limitée par la courbe C_f, la droite Δ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = n$.

a) Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ est croissante.

5) a) $a_n = \int_1^n (f(x) - x)\, dx$

Donc $a_{n+1} - a_n = \int_n^{n+1} (f(x) - x)\, dx$ or $x \in [n, n+1]$ donc $x > 0$ et $f(x) - x \geq 0$ donc $\int_n^{n+1} (f(x) - x)\, dx \geq 0$

D'où $a_{n+1} - a_n \geq 0$ et par suite la suite (a_n) est croissante.

b) Soit $n \geq 2$, montrer que pour tout $x \in [1, n]$, $\frac{e^{-x}}{n + f(n)} \leq f(x) - x \leq \frac{e^{-x}}{1 + f(1)}$.

b) $\beta < 1 \leq x \leq n$ et f est strictement croissante sur $[\beta, +\infty[$ donc

$f(1) \leq f(x) \leq f(n)$ d'où $f(1) + 1 \leq f(x) + x \leq f(n) + n \Leftrightarrow \frac{1}{f(n)+n} \leq \frac{1}{f(x)+x} \leq \frac{1}{f(1)+1}$

Et $e^{-x} > 0$ ainsi $\frac{e^{-x}}{f(n)+n} \leq \frac{e^{-x}}{f(x)+x} \leq \frac{e^{-x}}{f(1)+1}$ et par suite $\frac{e^{-x}}{f(n)+n} \leq f(x) - x \leq \frac{e^{-x}}{f(1)+1}$

c) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\frac{e^{-1} - e^{-n}}{n + f(n)} \leq a_n \leq \frac{e^{-1} - e^{-n}}{1 + f(1)}$.

c) $\frac{e^{-x}}{f(n)+n} \leq f(x) - x \leq \frac{e^{-x}}{f(1)+1}$ et les fonctions de l'encadrement sont continue sur $[1, +\infty[$ et $n \geq 2$.

Donc $\int_1^n \frac{e^{-x}}{f(n)+n} dx \leq \int_1^n f(x) - x\, dx \leq \int_1^n \frac{e^{-x}}{f(1)+1} dx \Leftrightarrow \frac{1}{f(n)+n} \int_1^n e^{-x} dx \leq a_n \leq \frac{1}{f(1)+1} \int_1^n e^{-x} dx$

donc $\frac{1}{f(n)+n}\left[-e^{-x}\right]_1^n \le a_n \le \frac{1}{f(1)+1}\left[-e^{-x}\right]_1^n$ d'où $\frac{e^{-1}-e^{-n}}{f(n)+n} \le a_n \le \frac{e^{-1}-e^{-n}}{f(1)+1}$

d) Montrer que la suite $(a_n)_{n\ge 2}$ est convergente.

$\frac{e^{-1}-e^{-n}}{f(n)+n} \le a_n \le \frac{e^{-1}-e^{-n}}{f(1)+1}$ or $e^{-n} \ge 0$ d'onc $e^{-1}-e^{-n} \le e^{-1}$ D'où $\frac{e^{-1}-e^{-n}}{1+f(1)} \le \frac{e^{-1}}{1+f(1)}$

Donc la suite (a_n) est croissante et majoré par $\frac{e^{-1}}{1+f(1)}$ d'où elle est convergente.

6) a) Déterminer une valeur approchée à 10^{-4} de chacun des nombres $\frac{e^{-1}-e^{-2}}{2+f(2)}$ et $\frac{e^{-1}}{1+f(1)}$.

$\frac{e^{-1}-e^{-2}}{2+f(2)} = 0{,}0577$ et $\frac{e^{-1}}{1+f(1)} = 0{,}1696$

b) On note $L = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Montrer que $0.05 < L < 0.17$.

b) Pour tout $n \ge 2$

La suite (an) est croissante donc elle minorée par le premier terme a_2 donc $a_2 \le a_n$ et $\frac{e^{-1}-e^{-2}}{f(2)+2} \le a_2$

donc $\frac{e^{-1}-e^{-2}}{f(2)+2} \le a_n$ et comme $a_n \le \frac{e^{-1}}{f(1)+1}$

D'où $\frac{e^{-1}-e^{-2}}{f(2)+2} \le a_n \le \frac{e^{-1}}{f(1)+1}$ et (a_n) est convergente donc $\frac{e^{-1}-e^{-2}}{f(2)+2} \le \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \le \frac{e^{-1}}{f(1)+1}$

D'où $\frac{e^{-1}-e^{-2}}{f(2)+2} \le L \le \frac{e^{-1}}{f(1)+1}$ et $\frac{e^{-1}-e^{-2}}{2+f(2)} = 0{,}0577 > 0{,}05$ et $\frac{e^{-1}}{1+f(1)} = 0{,}1696 < 0{,}17$

D'où $0{,}05 < L < 0{,}17$